

Geometry of Alexandrov spaces

著者	三石 史人
内容記述	Thesis (Ph. D. in Science)--University of Tsukuba, (A), no. 5620, 2011.3.25 Includes bibliographical references
発行年	2011
URL	http://hdl.handle.net/2241/113122

氏 名 (本籍)	三 石 史 人 (神奈川県)
学 位 の 種 類	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	博 甲 第 5620 号
学位授与年月日	平成 23 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
審 査 研 究 科	数理物質科学研究科
学 位 論 文 題 目	Geometry of Alexandrov spaces (アレクサンドロフ空間の幾何学)

主	査	筑波大学教授	理学博士	山 口 孝 男
副	査	筑波大学教授	理学博士	加 藤 久 男
副	査	筑波大学講師	博士 (数理学)	永 野 幸 一
副	査	筑波大学講師	理学博士	星 野 光 男

論 文 の 内 容 の 要 旨

本論文は、アレクサンドロフ空間とよばれる曲率の下限の概念をもつ距離空間の幾何学に関する二つの主題からなる。一つは無限次元アレクサンドロフ空間の幾何学を展開すること、他の一つは、塩谷-山口の 3 次元多様体の崩壊理論をアレクサンドロフ空間に拡張することである。

無限次元アレクサンドロフ空間の幾何学を展開するための第一歩として、三石氏は、分解定理に着目した。分解定理は、直線を含む非負曲率空間が実直線とある非負曲率空間との直積空間に分解することを主張するものであり、有限次元空間の幾何学において極めて重要な役割を果たしてきた。三石氏は、有限次元非負曲率空間に対して知られていた分解定理を、無限次元アレクサンドロフ空間に拡張した。その応用として正曲率をもつ無限次元アレクサンドロフ空間が最大半径をもつとき、その空間があるヒルベルト空間における単位球面と等長的であることを証明した (最大半径定理)。また、ある測度空間から非負曲率アレクサンドロフ空間へのある種の 2 乗可積分な写像全体のなす空間が、非負曲率をもつ無限次元アレクサンドロフ空間であることを証明し、大変興味深い無限次元アレクサンドロフ空間の例を構成した。一方で、先に述べた最大半径定理における半径の条件を少し緩めても、考察の空間があるヒルベルト空間における単位球面とある意味で近いかどうかという大変興味深い問題が残る。三石氏は、この問題に対して、ある点において接錐がヒルベルト空間であり、その点における任意の方向に準測地線が十分延びるという条件下で、考察の正曲率の無限次元アレクサンドロフ空間がほとんど最大半径をもてば、その空間がヒルベルト空間における単位球面にグロモフ・ハウスドルフ距離の意味で近いことを示した。これは無限次元球面定理の可能性を示唆するものとして大変興味深い。

第二の主題である 3 次元アレクサンドロフ空間の崩壊現象は、アレクサンドロフ空間のなすモジュライ空間がコンパクトであることから大変自然で、かつ重要な問題であることが分かる。このモジュライ空間において、3 次元アレクサンドロフ空間の列が、ある極限空間にグロモフ・ハウスドルフ距離に関して収束するとき、もし崩壊が起きなければペレルマンの安定性定理により、空間の位相は変わらない。そこで崩壊が起こる場合、すなわち極限空間の次元が 2 以下の場合が本質的に問題となる。このモジュライ空間における崩

壊理論を確立するために、三石氏は境界のない3次元アレクサンドロフ空間で曲率が下に、直径が上に一様に有界であるもの全体からなるモジュライ空間を考察し、その崩壊現象を全て明らかにした。

本論文では、まず極限空間が2次元で境界が無い場合に、崩壊する3次元アレクサンドロフ空間が、極限空間上の一般化されたザイフェルト・ファイバー空間の構造をもつことが示されている。極限空間が2次元で境界がある場合には、この境界に近い3次元アレクサンドロフ空間のある部分が、一般化されたソリッド・トーラスまたは一般化されたソリッド・クラインボトルの構造をもつことが示されている。極限空間が1次元円周の場合、崩壊する3次元アレクサンドロフ空間は、円周上のファイバー束構造をもつ。ここでファイバーは、楕円型または方物型の閉曲面である。極限空間が1次元閉区間や一点の場合も、崩壊する3次元アレクサンドロフ空間の構造が正確に記述されている。

審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文における第一の主題である無限次元アレクサンドロフ空間の幾何学を展開する問題において、正曲率アレクサンドロフ空間が殆ど最大半径をもつ場合に、無限次元球面定理の可能性を示す三石氏の結果は、先行研究が全くない中、また無限次元特有の困難さがある中で、挑戦的な論文として評価できる。3次元アレクサンドロフ空間の崩壊現象の解明は、リーマン多様体の崩壊の場合の手法を越える、新しいベクトル場のフローの概念を創った点が大変評価出来る。また崩壊定理を記述する為に、一般化されたザイフェルト・ファイバー空間の概念など新しい概念が定められている。これは特異ファイバーとして円周以外に閉区間を許容するもので大変興味深い。更に、一般化されたソリッド・トーラスや一般化されたソリッド・クラインボトルの概念など、特異3次元空間に対する興味深い新概念が提起されている。本論文で得られた3次元アレクサンドロフ空間の位相は、実際崩壊するアレクサンドロフ空間としての計量をもつことから、必要充分の結果であるといえる。以上のことは、この本論文において得られた3次元アレクサンドロフ空間の崩壊定理が、世界的な研究であることを示すものでもある。

今後、境界を持つ場合や直径が非有界である3次元アレクサンドロフ空間の崩壊、更に4次元アレクサンドロフ空間の崩壊など多くの結果の導出が期待される。

よって、著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。